Groupes d'isométries laissant invariant un ensemble donné.

↘ espace vectoriel euclidien E

Il semble qu'un certain nombre de résultats fondamentaux (« passe-partout ») soient à connaître. Citons : (ACE)

lemme 1 : Les isométries laissant A invariant forment un groupe.

Notons Is l'ensemble des isométries de E espace affine ($(Is, \circ)$ = groupe), Is^+ les déplacements de E ($(Is^+, \circ)$ = sous-groupe de Is), G le groupe en question.
Enfin, posons $G^+ = G \cap Is^+$ et $G^- = G \cap Is^-$

On a $G = G^+ \sqcup G^-$

lemme 2 : Si $G^- \neq \emptyset$, alors : $\forall s \in G^-$ $G^- = sG^+$

En effet, si $\sigma \in G^-$ $\sigma s^{-1} \in G^+$ car $s^{-1} \in G^- \Rightarrow G^- \subset sG^+$

Inversement, ~~considérons la relation, dans G, $f R g \Leftrightarrow fg^{-1} \in G^+$~~ on a $sG^+ \subset G^-$

Si ~~σ et $s \in G^-$, $\sigma s^{-1} \in G^+ \Rightarrow$~~ car, $\forall r \in G^+$ $sr \in G^-$. CQFD

Ce lemme ramène le calcul des éléments de G à celui des éléments de G^+ et d'un élément de G^-.

lemme 3 : Soit A un ensemble (fini) de points. Alors $f \in G \Rightarrow f$ conserve l'isobarycentre de ces points

Le résultat est trivial si l'on sait qu'une application affine conserve le barycentre

$A = \{A_1, \dots, A_n\}$ où A_i sont les sommets d'un polygône régulier.

(Aleph tome II géom TCE p 130)

1°/ Calcul de G^+

On applique le lemme 3 :

le point O est invariant par $f \in G$.

⇓

c'est le centre des rot. affines laissant A invariant.

Ces rotations seront parfaitement déterminées par leur angle dans $\mathcal{A}(\vec{E})$:

$$(\widehat{\vec{OA_1}, \vec{OA_i}}) \qquad i \in [1, n]$$

où $A_i = f(A_1)$

Il y a donc n rotations possibles. et elles conservent A car $\forall i \in [1, n]$ $r(A_i) \in A$ (définition du polygône régulier)

A savoir, les rotations de centre O et d'angle $(\vec{OA_1}, \vec{OA_i})$ où $i \in [1, n]$.

A₃ A₄ A₂ A₁ O — angle mesuré par $i\frac{2\pi}{n}$ = déf. du polygône

2°/ Calcul de G dans des cas particuliers.

Le calcul de G^- est ramené (grâce au lemme 2) à celui d'un élément de G^-.

Je distingue 2 cas suivant que n soit pair ou impair.

a) n pair

Posons $n = 2n'$

A_k est d'affixe $e^{i(k-1)\frac{2\pi}{n}}$

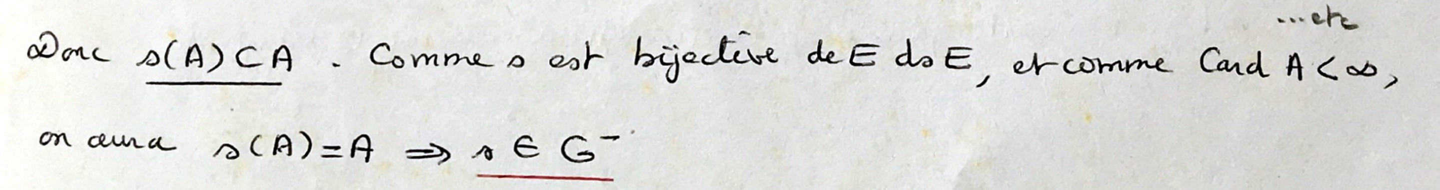
Tous les points de A sont d'affixe $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$ $k \in [1, n]$.

Considérons la symétrie orthogonale par rapport à Ox, que nous noterons s.

$$s(e^{i\theta}) = e^{-i\theta}$$

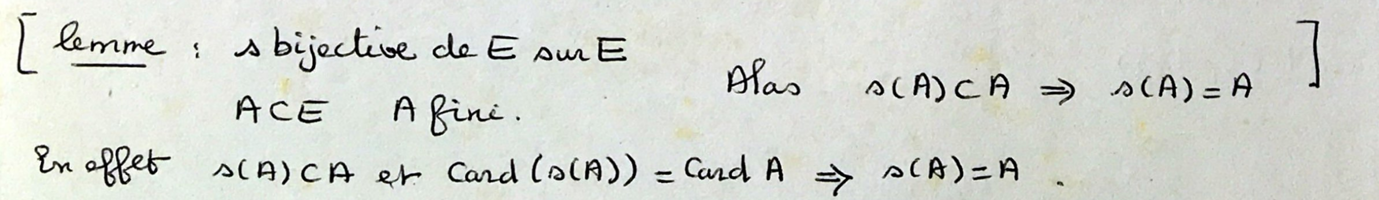
Ainsi $s(e^{ik\frac{2\pi}{n}}) = e^{-ik\frac{2\pi}{n}} \in A$.

A₃ A₂ A₄ A₁ O — 2 sommets, 4, 6, ... etc



Donc $s(A) \subset A$. Comme s est bijective de E ds E, et comme Card $A < \infty$,

on aura $s(A) = A \Rightarrow s \in G^-$



[lemme : s bijective de E sur E, $A \subset E$, A finie. Alors $s(A) \subset A \Rightarrow s(A) = A$]

En effet $s(A) \subset A$ et Card$(s(A))$ = Card $A \Rightarrow s(A) = A$.

b) n impair

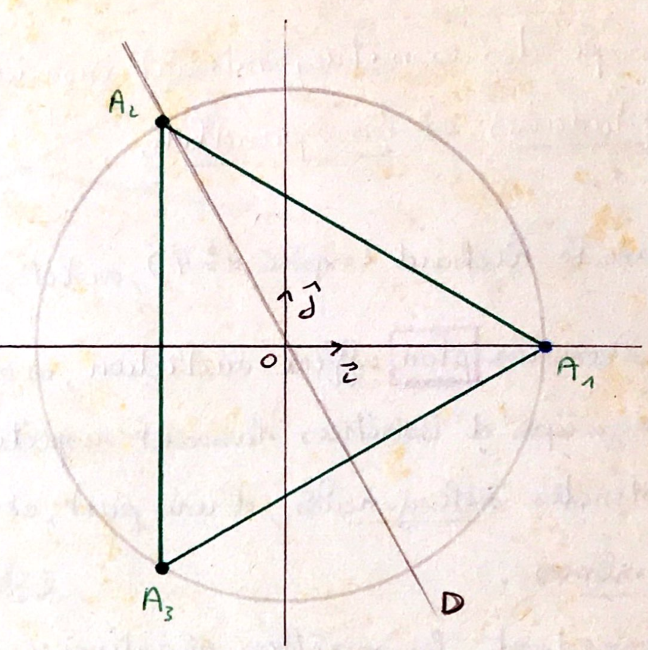
La symétrie s est plus difficile à trouver.

Posons $n = 2n'+1$

Les points de A sont d'affixes : $e^{ik\frac{2\pi}{n}}$

où $k \in [1, n]$

Prenons $k = n'$, et considérons la droite D passant par les points O et $e^{i\frac{n'2\pi}{n}}$. Considérons la symétrie orthogonale s par rapport à D, et montrons que $s(A) = A$.



• 1 sommet
— 3 "
— 5 "
...etc...

Matrice de s dans $(\vec{i}, \vec{j})$?

On trouve, tous calculs faits : $\begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & -\cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} = \text{mat}(s)_{(\vec{i},\vec{j})}$

$s(A) \subset A$?

Soit $e^{ik\frac{2\pi}{n}} \in A$. Alors $s(e^{ik\frac{2\pi}{n}}) = \begin{pmatrix} \cos\frac{2\pi}{n} & \sin\frac{2\pi}{n} \\ \sin\frac{2\pi}{n} & -\cos\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{k2\pi}{n} \\ \sin\frac{k2\pi}{n} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(1-k)\frac{2\pi}{n} \\ \sin(1-k)\frac{2\pi}{n} \end{pmatrix} = e^{i(1-k)\frac{2\pi}{n}} \in A$$

$s(A) \subset A \Rightarrow s(A) = A$ (m̂ lemme que précédemment)

CQFD

Rappels : $f = s_D \circ r$ = ~~rotati~~ symétrie par rapport à D', où D' est déterminée par $(\widehat{D', D}) = \mu^{-1}(\alpha)$ où $\begin{cases} \alpha = \text{angle de } r \\ \mu : \mathcal{A}' \to \mathcal{A} \\ \quad \alpha \mapsto 2\alpha \\ \text{isomorphisme} \end{cases}$

D
α
D'
α

Tous les éléments de G sont donc des symétries, et ils sont donnés par les droites D passant par A_i et par O.

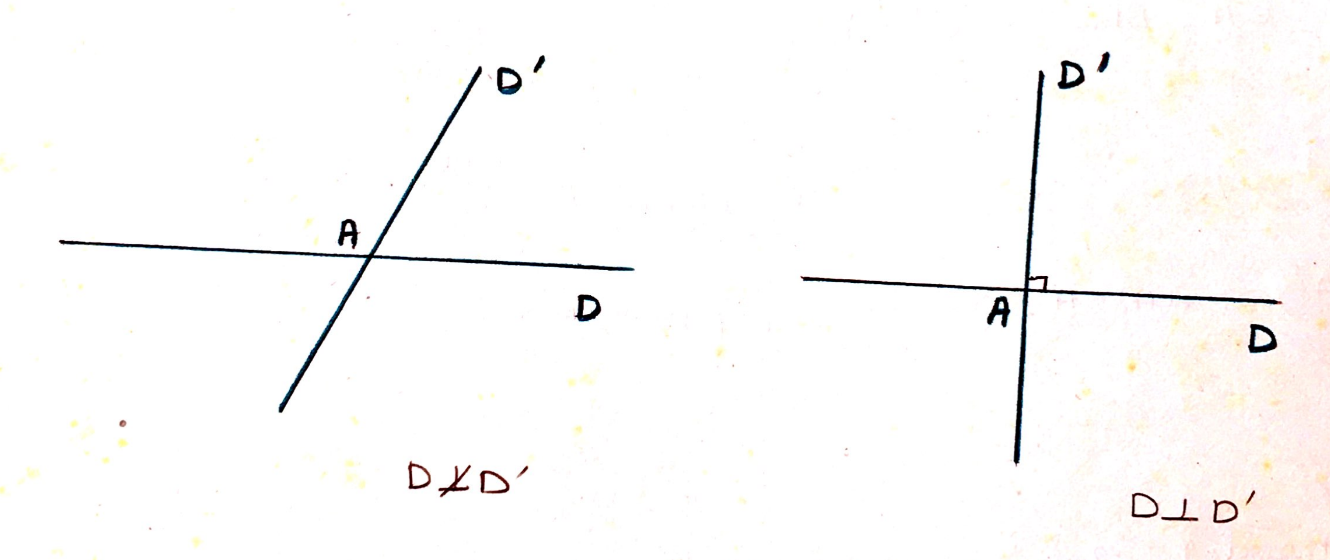
Groupe des isométries laissant invariante la réunion de 2 droites distinctes, coplanaires et non parallèles.

Dans le Richard (exposé n° 7), on lit, dans les rappels :

"Dans un plan affine euclidien, on sait que :
Les groupes d'isométries laissant respectivement invariantes les réunions de 2 droites distinctes orthogonales, d'une part, et non orthogonales, d'autre part, ne sont pas les mêmes.
Cependant, les isométries négatives (ou "antidéplacements") qui laissent invariantes l'union de 2 droites distinctes en échangeant ces 2 droites sont les symétries axiales par rapport aux bissectrices".

Tout ce qui suit va montrer cette affirmation.

Plan affine E : groupe G des isométries laissant invariante 2 droites non parallèles.



Notons $A = D \cap D'$.

Alors $\{f(D), f(D')\} = \{D, D'\}$

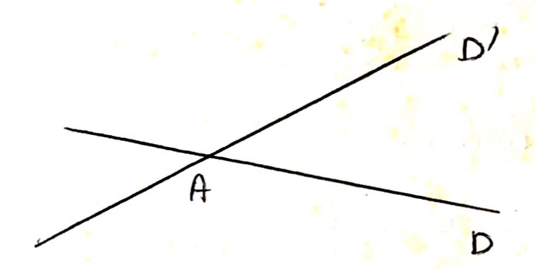
- il n'y a que 2 droites affines dans $D \cup D'$
- Comme f, affine, transforme une droite affine en 1 autre droite affine,

on a : $\{f(D), f(D')\} \subset \{D, D'\}$ Comme $f(D) = f(D') \Rightarrow f^{-1}(f(D)) = f^{-1}(f(D')) \Rightarrow D = D'$ absurde, on a : $\{f(D), f(D')\} = \{D, D'\}$

On a :

$\{f(D), f(D')\} = \{D, D'\}$

et $f(A) = A$



Rotations de G ?

$$r \in G^+ \iff \begin{cases} r = \text{rot. de centre } A \ / \begin{cases} r(D) = D \\ r(D') = D' \end{cases} & (1) \\ \text{ou} \\ r = \text{rot. de centre } A \ / \begin{cases} r(D) = D' \\ r(D') = D \end{cases} & (2) \end{cases}$$

(car il n'y a aucune translation distincte de l'Id. qui transforme D en D'. En effet, s'il en existait, $t(D)$ = droite parallèle à D $\Rightarrow t(D) = D$ mais alors $t(D') \neq$ droite parallèle à D' !)

(1) $\iff$ r rot. de centre A et de partie linéaire la rot. vect. ρ / $\begin{cases} \rho(\vec{D}) = \vec{D} \\ \rho(\vec{D'}) = \vec{D'} \end{cases}$

(2) $\iff$ r rot. de centre A et de partie linéaire la rot. vect. ρ / $\begin{cases} \rho(\vec{D}) = \vec{D'} \\ \rho(\vec{D'}) = \vec{D} \end{cases}$

Rappel : $\vec{D_1}$ et $\vec{D_2}$ données. $\exists$ 2 rot. vect. et 2 seulement telles que $\rho(\vec{D_1}) = \vec{D_2}$

En (1) : $\rho(\vec{D}) = \vec{D} \iff \rho = \pm Id$. Alors $\rho(\vec{D'}) = \vec{D'}$.

Donc (1) $\iff$ r = rot. de centre A associée à $\pm Id$

En (2) : $\rho(\vec{D}) = \vec{D'} \iff \rho$ = rot. d'angle α, ou $\alpha + \varpi$, si α = un représentant de $\dot{\alpha}$

$\dot{\alpha} = (\widehat{D, D'})$ (angle de droites vectorielles)

et

$\rho(\vec{D'}) = \vec{D} \iff \rho$ = rot. d'angle β ou $\beta + \varpi$ si $\dot{\beta} = (\widehat{D', D})$

Donc (2) $\iff \exists$ r rot. de centre A, de rot. vect. associée ρ d'angle $\alpha = \beta$ où $\dot{\alpha} = (\widehat{D, D'})$; $\dot{\beta} = (\widehat{D', D})$

Les rotations du (2) existent ssi $\underbrace{\alpha = \beta}$ $\iff (\widehat{D, D'}) = (\widehat{D', D})$
(abus de notation)

Résolution de $(\widehat{D, D'}) = (\widehat{D', D})$ (I)

(I) $\Leftrightarrow$ $(\widehat{D, D'}) + (\widehat{D, D'}) = \dot{\omega} = \{\omega, \bar{\omega}\}$

Se reporter au cours sur les angles. On pose $(\widehat{D, D'}) = \dot{\alpha}$

$$\dot{\alpha} + \dot{\alpha} = \dot{\omega}$$

En notant μ l'isomorphisme $\mu : \mathcal{A}' \to \mathcal{A}$
$\dot{\alpha} \mapsto 2\alpha$

on a : $2\dot{\alpha} = \dot{\omega} \Leftrightarrow 2\alpha + 2\alpha = 2\omega$

$\Leftrightarrow (\alpha + \alpha) + (\alpha + \alpha) = \omega$

$\Leftrightarrow \alpha + \alpha = \omega$ ou $\bar{\omega}$

$\Leftrightarrow \alpha \in \{\omega, \bar{\omega}, \delta_+, \delta_-\}$

$\Leftrightarrow \dot{\alpha} \in \{\dot{\omega}, \dot{\delta}_+\}$

Ainsi, il existe des rotations du type (2) ssi $(\widehat{D, D'}) \in \{\dot{\omega}, \dot{\delta}_+\}$. Comme $\vec{D} \neq \vec{D}'$ (droites non parallèles), on aura :

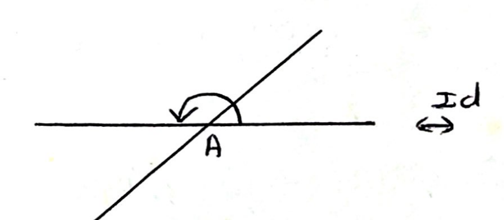
$\exists$ sol. du type (2) $\Leftrightarrow (\widehat{D, D'}) = \dot{\delta}_+$, et alors r = rot. de centre A et d'angle δ_+, ou δ_-.

$(\widehat{D, D'}) = \dot{\delta}_+ \Leftrightarrow$ D orthogonale à D'
(car $\rho(D) = D'$ où $\rho = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$)

Conclusion :

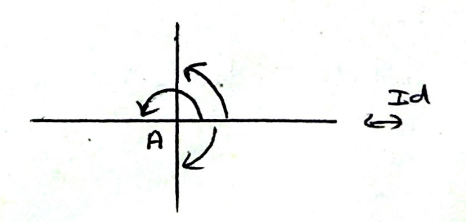
Cas où $D \not\perp D'$: $\# G^+ = 2$

$G^+ = \{ r(A, \omega) = Id \; ; \; r(A, \bar{\omega}) \}$

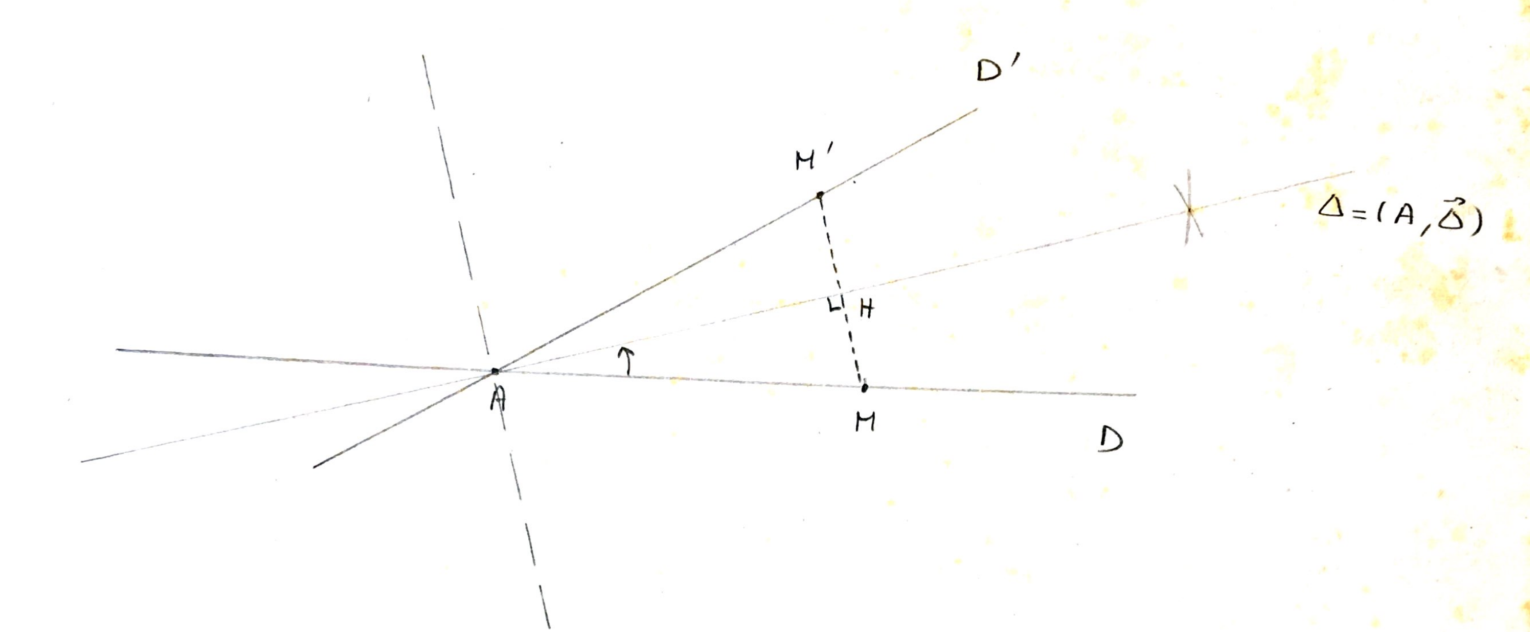


Cas où $D \perp D'$: $\# G^+ = 4$

$G^+ = \{ Id \; ; \; r(A, \bar{\omega}) \; ; \; r(A, \delta_+) \; ; \; r(A, \delta_-) \}$



Recherche d'une symétrie



$\exists\ \vec{\delta}$ bissectrice du couple de droites vect. $(\vec{D}, \vec{D}')$. (Il en existe m̂ 2 !)

Alors $s_\Delta(D) = D'$ et $s_\Delta(D') = D$ (II) où $\Delta = (A, \vec{\delta})$

Prouvons (II).

$\vec{\delta}\ /\ (\widehat{\vec{D}, \vec{\delta}}) = (\widehat{\vec{\delta}, \vec{D}'})$ (3)

Soit $M \in D$, $M \neq A$.

Soit H la projection orthogonale de M sur Δ.

Soit s_Δ la sym. orth. par rapport à Δ. Alors : $\begin{cases} s_\Delta(A) = A \\ s_\Delta(M) = M' \end{cases}$ et s_Δ associée à $\sigma_{\vec{\delta}}$.

On a $(\widehat{\vec{AM}, \vec{AH}}) = -(\widehat{\sigma_{\vec{\delta}}(\vec{AM}), \sigma_{\vec{\delta}}(\vec{AH})})$

$= -(\vec{AM}', \vec{AH})$

$(\widehat{\vec{AM}, \vec{AH}}) = (\widehat{\vec{AH}, \vec{AM}'})$

et $\begin{cases} \vec{AH} \in \vec{\delta} \\ \vec{AM} \in \vec{D} \\ \vec{AM}' \in \sigma_{\vec{\delta}}(\vec{D}) \end{cases}$

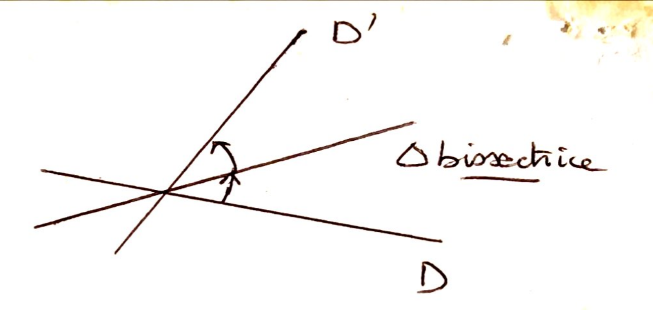
d'où $(\widehat{\vec{D}, \vec{\delta}}) = (\widehat{\vec{\delta}, \sigma_\delta(\vec{D})})$ (angles de droites.)

En se rappelant de (3) : $(\widehat{\vec{\Delta}, \vec{D}'}) = (\widehat{\vec{\delta}, \sigma_\delta(\vec{D})})$ (angles de droites)

$\Updownarrow$ (cf. prop. angles)

$\vec{D}' = \sigma_\delta(\vec{D})$

Enfin, comme $s_\Delta(A) = A$, on a $s_\Delta(D) = D'$.
$\hat{M}$ démonstration pour $s_\Delta(D') = D$.
CQFD



NB : Dans un e.v., montrer, en utilisant une démonstration semblable, que, si $\vec{\Delta}$ = bissectrice de $(\vec{D}, \vec{D}')$ (droites vectorielles), alors $\sigma_{\vec{\Delta}}(\vec{D}) = \vec{D}'$ et $\sigma_{\vec{\Delta}}(\vec{D}') = \vec{D}$.
(il en existe 2)

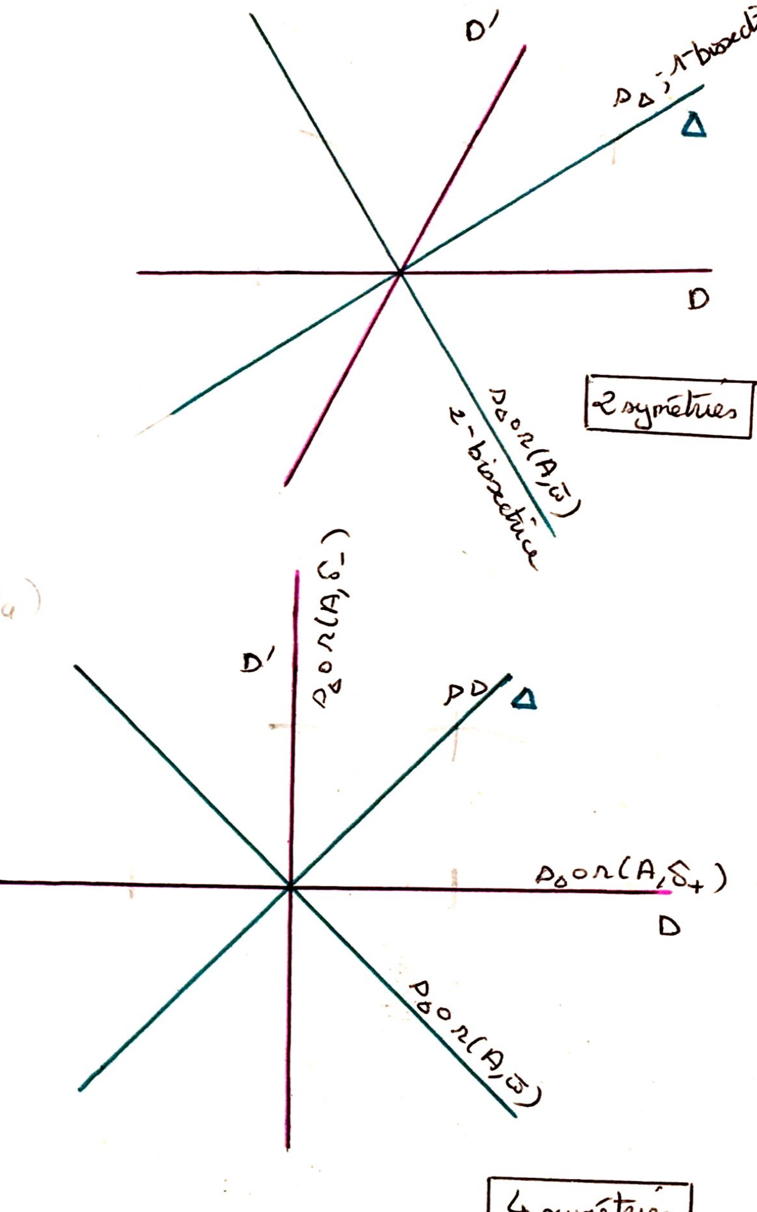
Conclusion :

Si $D \not\perp D'$: $\# G = 4$

Id ; s_Δ

$r(A, \varpi)$; $s_\Delta \circ r(A, \varpi)$

$G = G^+ \sqcup G^-$



Si $D \perp D'$: $\# G = 8$ (groupe diédral $\mathbb{D}_4$)

Id ; s_Δ
$r(A, \varpi)$; $s_\Delta \circ r(A, \varpi)$ (sym/2$^-$ biss.)
$r(A, \delta_+)$; $s_\Delta \circ r(A, \delta_+)$ (sym/D)
$r(A, \delta_-)$; $s_\Delta \circ r(A, \delta_-)$ (sym/D')